EDHEC
Etablissement privé reconnu par l'Etat

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

CONCOURS D'ADMISSION 1981

MATHEMATIQUES °

L'énoncé comporte 4 pages

Durée : 4 heures - Coefficient : 5
(Coef. G/H : 4)

- PROBLEME I -

On considère l'application f définie de la façon suivante :

$$f : \mathbb{C} - \{1\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$z \longmapsto f(z) = \frac{z^2 - 5z + 7}{z - 1}$$

Montrer que f(z) peut s'écrire sous la forme $\alpha z + \beta + \frac{\gamma}{z - 1}$ $\quad (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$

I) On rappelle que $\mathbb{Q}$ désigne l'ensemble des rationnels et $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs. On suppose que $z \in \mathbb{Q} - \{1\}$.

1°. Montrer que $f(z) \in \mathbb{Z}$ implique $z \in \mathbb{Z}$.

2°. En déduire tous les rationnels z tels que $f(z) \in \mathbb{Z}$.

II) On suppose maintenant que $z \in \mathbb{R} - \{1\}$

1°. Etudier les variations de f et en donner la représentation graphique C dans un repère orthonormé. (On précisera les asymptotes et la position de la courbe C par un rapport à l'asymptote oblique ; on placera également les points trouvés en I 2°)

2°. Calculer $f(1 + z) + f(1 - z)$

En déduire que la courbe C admet un centre de symétrie dont on précisera les coordonnées.

3°. Calculer l'aire arithmétique A du domaine compris entre la droite d'équation z = 0, la courbe C, l'asymptote oblique et la droite d'équation z = a, a étant un réel strictement négatif.

Comment choisir a pour que A = 1 ?

.../...

° Lors de la correction il sera tenu compte de la clarté des raisonnements et du soin apporté aux copies.

III) On suppose enfin que $z \in \mathbb{C} - \{1\}$

1°. on pose $z = x + yi$ et $f(z) = X + i\,Y$

Déterminer X et Y en fonction de x et y.

2°. En déduire l'ensemble des points M d'affixe z tels que $f(z) \in \mathbb{R}$
Donner suivant les cas trouvés, l'expression de $f(z)$ en fonction de x.

- PROBLEME II -

I. Un tireur tire une série de 6 balles. Pour chaque balle, la probabilité de toucher une cible est de 0,4.

Soit X la variable aléatoire réelle, égale au nombre de fois où la cible a été touchée au cours de la série.

1. Donner la loi de probabilité de X.

2. Quelle est la probabilité d'avoir touché 5 fois exactement la cible sachant qu'il l'a touchée au moins 2 fois ?

3. Quel est le nombre minimum k de séries de 6 balles, qu'il doit effectuer pour que la probabilité d'avoir touché au moins une fois la cible (au cours des 6 k tirs) soit supérieure à 0,9999

II. Un autre tireur tire une série de n balles.

Soit Y la variable aléatoire réelle égale au nombre de fois où il atteint la cible au cours des n tirs.

On suppose que la loi de Y peut être assimilée à une loi normale $N(m, \sigma)$

On sait d'autre part, que $P(Y < 13) = 0{,}002$

$P(Y > 30) = 0{,}003$

Déterminer alors la moyenne et l'écart-type de Y.

Quelle est pour ce tireur, la probabilité qu'il touche la cible à chaque tir d'une balle ?

Donner une estimation de n (à une unité près).

.../...

- PROBLEME III -

Le tableau suivant donne, pour les années 1973 à 1980, les taux d'accroissement y , du produit intérieur brut français, et x de la consommation des ménages en France.

Ces taux sont exprimés en % .

nnée	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980
x	5,5	2,1	2,9	4,9	2,5	3	3,5	2,3
y	5,3	2,9	0,4	4,7	3	3,3	3,8	2,2

1. Calculer la co-variance σ_{xy} , des caractères x et y

2. Donner les équations des droites de régression de y en x , et de x en y

3. Quel est le coefficient de corrélation de x et y

N.B. : On fera apparaître clairement les formules développées, utilisées ainsi que les calculs intermédiaires.

On ne tiendra pas compte des résultats non expliqués.

- PROBLEME IV -

I) Soit f_n la fonction définie sur $[0,1]$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, par :

$$\begin{cases} f_n(x) = \dfrac{n^2 x}{\text{Log } n} & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right[\\ f_n(x) = \dfrac{1}{x \text{ Log } n} & \text{si } x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right] \end{cases}$$

1°. Montrer que f_n est continue sur $[0,1]$.

2°. Calculer $u_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$.

3°. Montrer que $\forall x \in [0,1]$, $\lim_{n \to +\infty} f_n(x)$ existe. Donner sa valeur.

4°. Comparer $\int_0^1 \left[\lim_{n \to +\infty} f_n(x)\right] dx$ et $\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx$

.../...

II) Pour $y \in \mathbb{R}$, $y \geqslant 2$, on définit la fonction f_y sur $[0,1]$ par

$$\begin{cases} f_y(x) = \dfrac{y^2 x}{\text{Log } y} & \text{si } x \in \left[0, \dfrac{1}{y}\right[\\ f_y(x) = \dfrac{1}{x \text{ Log } y} & \text{si } x \in \left[\dfrac{1}{y}, 1\right] \end{cases}$$

1°. Soit $y = y_0 \geqslant 2$

Représenter graphiquement la fonction f_{y_0}.

On précisera pour quelle valeur, que l'on notera x_0 , la fonction f_{y_0} est maximum.

A quel intervalle appartient nécessairement x_0 ?

2°.a) Montrer que $\forall y \geqslant 2$, $y \neq y_0$, $f_y(x_0) < f_{y_0}(x_0)$

Pour cela on étudiera les 2 cas : $2 \leqslant y < y_0$ et $y > y_0$

En déduire la valeur de $g(x) = \sup_{y \geqslant 2} \left[f_y(x)\right]$ pour $x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$

b) Pour $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, montrer que $f_y(x) \leqslant f_2(x)$

En déduire la valeur de $g(x) = \sup_{y \geqslant 2} \left[f_y(x)\right]$ pour $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

c) Calculer $g(0)$ et représenter graphiquement la fonction $g(x)$ pour $x \in [0,1]$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail